

Közelítően optimális görbék konstrukciója

Sipos Ágoston, Valasek Gábor

Eötvös Loránd Tudományegyetem

IX. Magyar Számítógépes Grafika és Geometria Konferencia
Budapest 2018

Tartalom

- ▼ Interpolációs görbék
 - Geometriai Hermite
 - Parametrizálhatóság
 - Optimalizáció
- ▼ Algoritmus
 - Optimumleképezés
 - Közelítési módszerek
- ▼ Összefoglalás

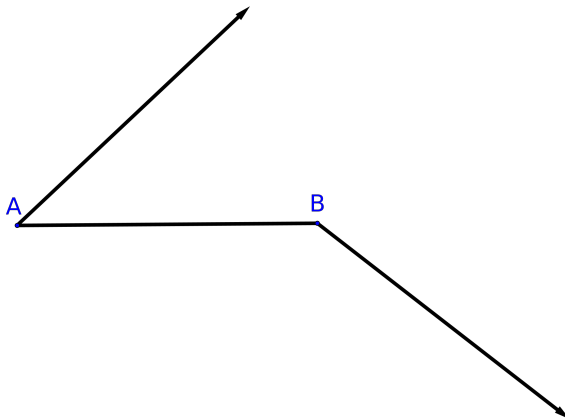
Geometriai Hermite interpoláció

Nulladrendben:



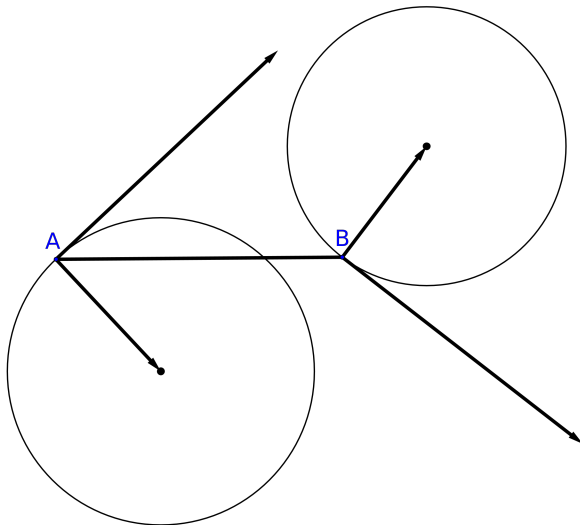
Geometriai Hermite interpoláció

Elsőrendben:



Geometriai Hermite interpoláció

Másodrendben:



Geometriai Hermite interpoláció

Geometriai Hermite-interpoláció

A GH interpoláció olyan parametrikus görbék konstrukciójával foglalkozik, amelyek adott paraméterértékekben előírt paraméterezésfüggetlen mennyiségeket, geometriai invariánsokat interpolálnak.

rend (i)	0	1	2	3	..	n
GH adat ($\mathbf{D}_i$)	$\mathbf{p}$	$\mathbf{t}$	$\mathbf{n}, \kappa$	κ', τ	..	$\kappa^{(n-2)}, \tau^{(n-3)}$

ahol $\mathbf{p} \in \mathbb{E}^3$ rekonstruálandó pozíció, $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ rendre a Frenet kísérő triéder tangens, normális és binormális egységvektorai, κ, τ pedig a görbület- és torziófüggvény, $\kappa^{(n)}, \tau^{(n)}$ ezek ívhossz szerinti deriváltjai.

Tétel (GH interpoláció folytonossága)

A GH interpoláció görbeszegmensek között i -edrendű folytonosságot garantál a végpontokban.

Szabadságfokok

Tétel (GH interpoláció szabadságfokai)

A két végponti GH interpoláció n -edrendben megoldható $(2n + 1)$ -edfokú polinomokkal, és a megoldás egy $2n$ paraméteres görbesereg lesz.

Megjegyzés:

A $2n$ darab szabadságfok ($\mathbf{f}(t)$ -vel jelölve az interpoláns görbét) a $\overrightarrow{x}_i = \mathbf{f}^{(i)}(0) \cdot \mathbf{t}(0)$ és $\overleftarrow{x}_i = \mathbf{f}^{(i)}(1) \cdot \mathbf{t}(1)$, $(i = 1..n)$ Frenet-koordináták a két végpontban.

Ugyanis ekkor az interpoláns végponti deriváltjai egyértelműen meghatározhatók az alábbi képletekkel

$$\mathbf{f}' = x_1 \mathbf{t}$$

$$\mathbf{f}'' = x_2 \mathbf{t} + x_1^2 \kappa \mathbf{n}$$

$$\mathbf{f}''' = x_3 \mathbf{t} + (3x_1 x_2 \kappa + x_1^3 \kappa') \mathbf{n} + x_1^3 \kappa \tau \mathbf{b}$$

$$\vdots$$

Szabadságfokok

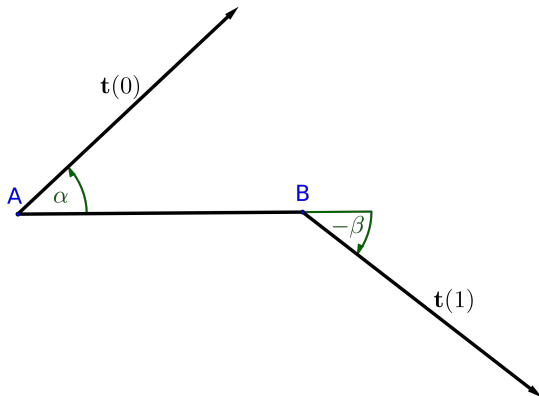
A végponti deriváltakból pedig a görbe paraméterezése (például) a Bernstein-bázisban az alábbi egyenletrendszer megoldásával adódik (B_i az i -edik $(2n+1)$ -edfokú Bernstein-polinom)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}(0) \\ \mathbf{f}'(0) \\ \mathbf{f}''(0) \\ \vdots \\ \mathbf{f}^{(n)}(0) \\ \mathbf{f}(1) \\ \mathbf{f}'(1) \\ \mathbf{f}''(1) \\ \vdots \\ \mathbf{f}^{(n)}(1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} B_0(0) & B_1(0) & \dots & B_{2n+1}(0) \\ B'_0(0) & B'_1(0) & \dots & B'_{2n+1}(0) \\ B''_0(0) & B''_1(0) & \dots & B''_{2n+1}(0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_0^{(n)}(0) & B_1^{(n)}(0) & \dots & B_{2n+1}^{(n)}(0) \\ B_0(1) & B_1(1) & \dots & B_{2n+1}(1) \\ B'_0(1) & B'_1(1) & \dots & B'_{2n+1}(1) \\ B''_0(1) & B''_1(1) & \dots & B''_{2n+1}(1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_0^{(n)}(1) & B_1^{(n)}(1) & \dots & B_{2n+1}^{(n)}(1) \end{bmatrix}}_{B \in \mathbb{R}^{(2n+2) \times (2n+2)}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{p}_0 \\ \mathbf{p}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_{2n+1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{p}},$$

Konfigurációk - általában

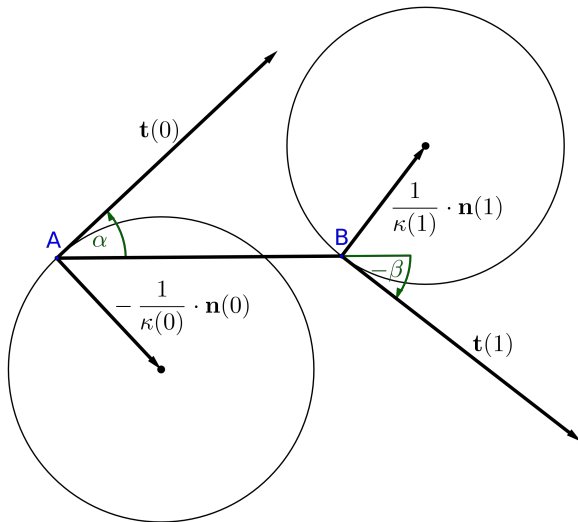
- ▶ Csak síkgörbéket vizsgálunk
- ▶ A konfigurációkat normalizáljuk a $(0,0)$ kezdő-, és $(1,0)$ végpontba.
- ▶ Elsőrendben így 2, másodrendben 4 skalármennyiséggel tudjuk leírni a konfigurációkat.

Konfigurációk - elsőrend



Elsőrendű illesztés paraméterezése két szöggel

Konfigurációk - másodrend



Másodrendű illesztés paraméterezése két szöggel, és két előjeles görbülettel

Görbe optimalizációja

Mivel vannak a feladatnak szabadságfokai, lehetőség van a görbét valamilyen funkcionál szerint optimalizálni.

Például:

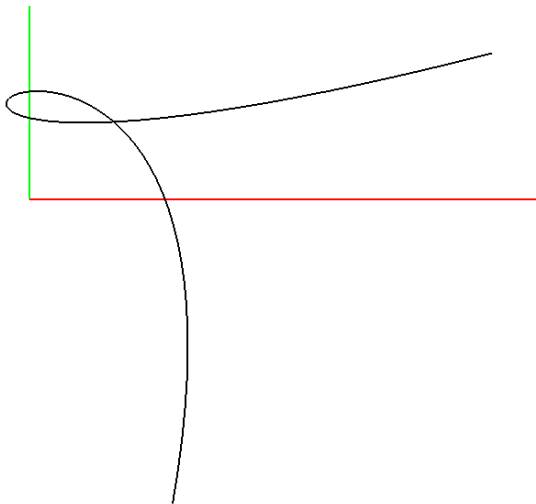
$$\int_0^1 \langle \mathbf{f}'(x), \mathbf{f}''(x) \rangle dx$$

Ez a funkcionál közelítően konstans sebességű görbék konstruálására alkalmas.

$$\int_0^1 |\kappa(x)| dx$$

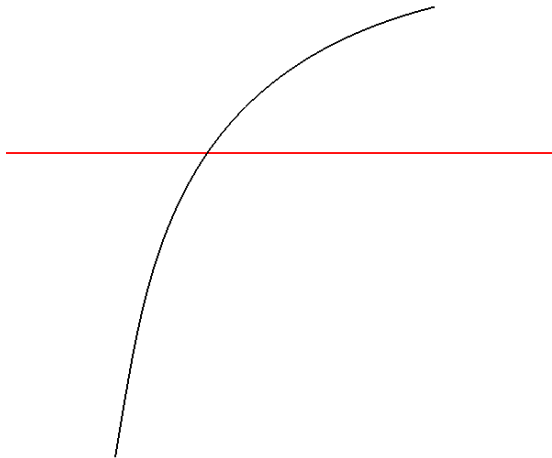
Ez a célfüggvény minimalizálja a görbe görbületi integrálját, ezáltal minél egyenesebb görbéket hoz létre.

Görbe optimalizációja - példák



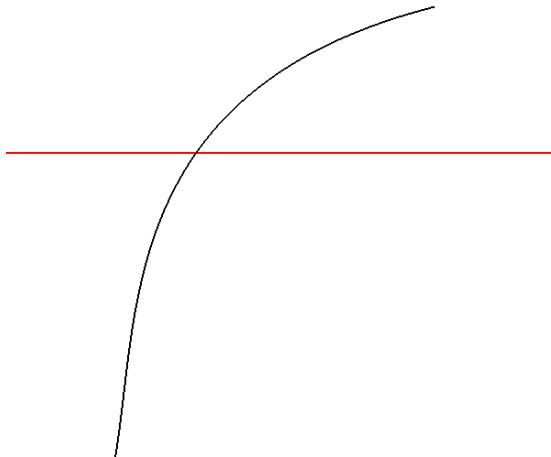
Eredeti (harmadfokú) görbe

Görbe optimalizációja - példák



Konstans sebességre optimalizált görbe

Görbe optimalizációja - példák



Görbület minimalizálásra optimalizált görbe

Görbe optimalizációja

Mivel $2n$ szabadságfokunk van, ezért egy $\mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ optimalizálási feladattal kaphatjuk meg az optimális paramétereket.

A kutatás célja az, hogy ezeket a paramétereket konstans időben, az optimalizáció végrehajtása nélkül közelíteni tudjuk.

Tartalom

- ▼ Interpolációs görbék
 - Geometriai Hermite
 - Parametrizálhatóság
 - Optimalizáció
- ▼ Algoritmus
 - Optimumleképezés
 - Közelítési módszerek
- ▼ Összefoglalás

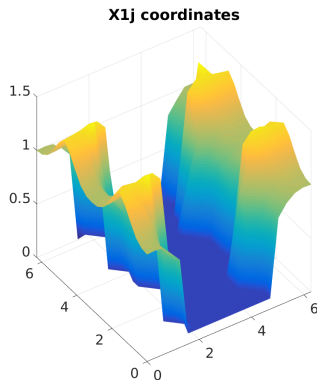
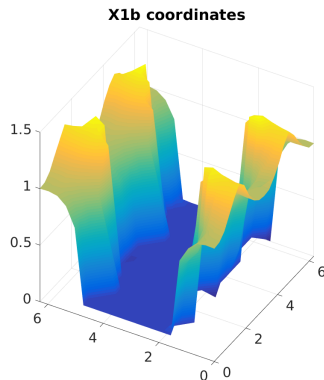
Optimumleképezés

Definíció (Optimumleképezés)

Azt a $D_n \times D_n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ függvényt, amely egy geometriai konfigurációpárhoz (kezdő- és végpont) hozzárendeli a GH interpoláció optimális paramétereit, optimumleképezésnek nevezzük.

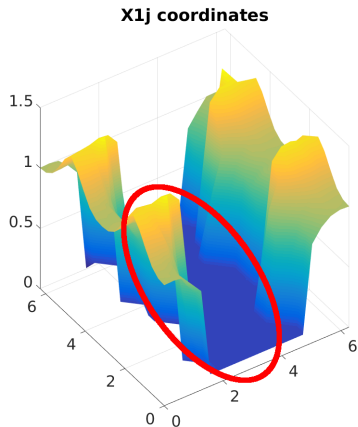
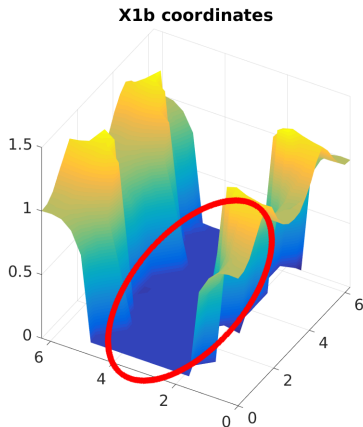
Megjegyzés: Az optimumleképezés általában nem ismert, csak közelíteni tudjuk.

Példa optimumleképezésre



Optimumleképezés közelítése a közelítően konstans sebesség funkcionálra ($[0, 2\pi]$)

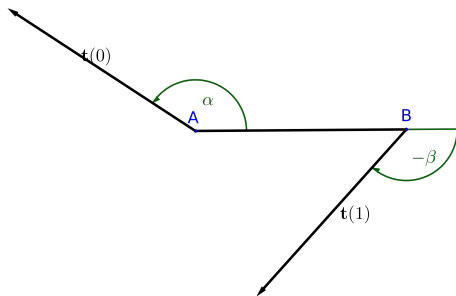
Példa optimumleképezésre



Optimumleképezés közelítése a közelítően konstans sebesség funkcionálra $([0, 2\pi])$

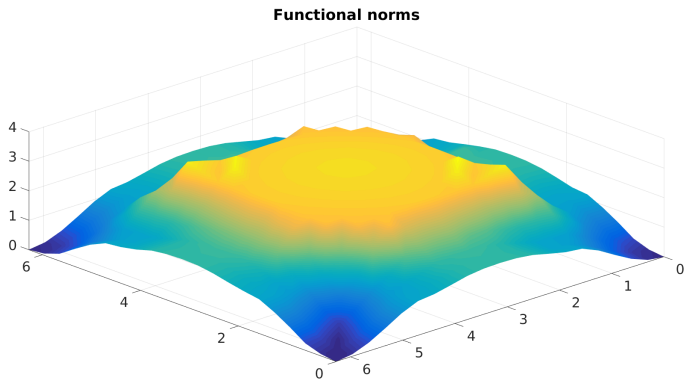
Példa optimumleképezésre

"Rossz"-nak tekinthető egy konfiguráció az optimalizálás szempontjából, ha a tangens és a kezdőpont-végpont vektor skaláris szorzata negatív.



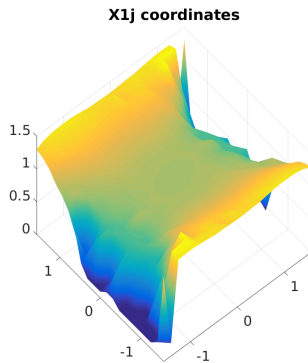
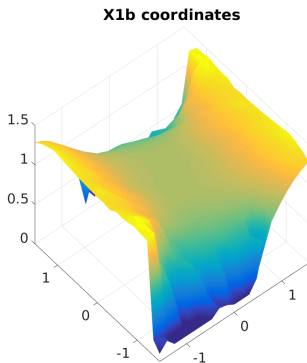
"Rossz" konfiguráció elsőrendben

Példa optimumleképezésre



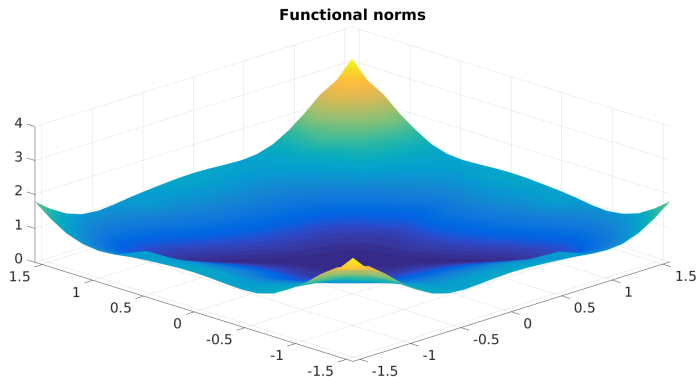
Optimális görbék normája a közelítően konstans sebesség funkcionálra $([0, 2\pi])$

Példa optimumleképezésre



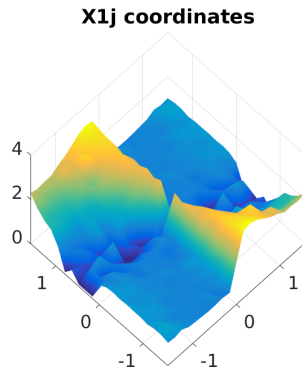
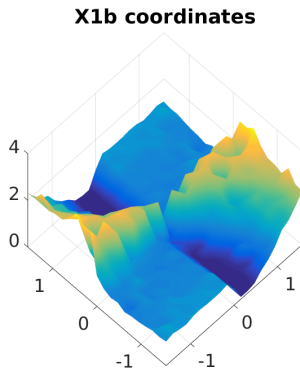
Opt.leképezés közelítése a közelítően konstans sebesség funkcionálra $([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$

Példa optimumleképezésre



Optimális görbék normája a közelítően konstans sebesség funkcionálra $([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$

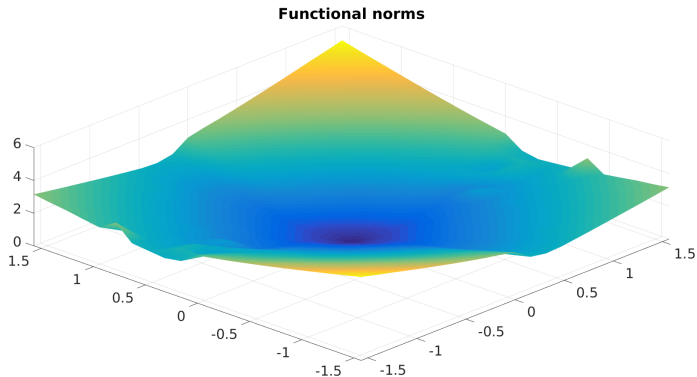
Példa optimumleképezésre



Optimumleképezés közelítése a görbületminimalizáló funkcionálra ($[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$)

Megjegyzés: Ennek az optimumleképezésnek a teljes $[0, 2\pi]$ -n véve szingularitásai vannak.

Példa optimumleképezésre



Optimális görbék normája a görbületminimalizáló funkcionálra $([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$

Közelítési módszerek

Tegyük fel, hogy az optimumleképezés folytonos. Ekkor ha ismert az optimumleképezés közelítése (azaz egy rácson kiértékeljük az optimális szabadságfokokat), akkor az ismert értékek alapján közelíthetők az optimális szabadságfokok.

Az alábbi módszereket próbáltuk ki:

- ▶ Legközelebbi szomszéd
- ▶ Bilineáris interpoláció
- ▶ Köbös spline interpoláció
- ▶ Szakaszos Hermite interpoláció

Módszerek elemzése - elsőrend

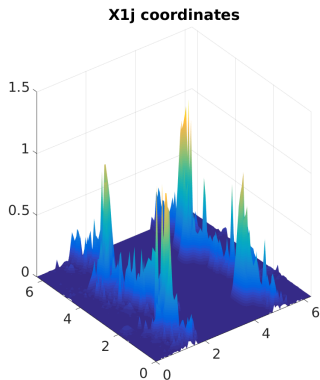
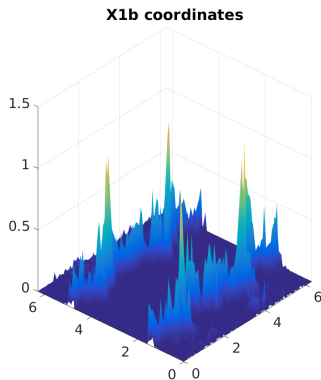
$\vec{x}_1$ becslésének hiba statisztikái a következők:

Módszer	Átlag	Szórás	Medián
Legközelebbi	0.0645	0.1793	0.0018
Bilineáris	0.0658	0.1663	0.0025
Köbös spline	0.1196	0.2404	0.0187
Szakaszos Hermite	0.0588	0.1602	0.0017

A becsült görbék tényleges célfüggvény-értékének eltérése az optimálisétól:

Módszer	Átlag	Szórás	Medián
Legközelebbi	0.0250	0.0539	0.0086
Bilineáris	0.0146	0.0384	0.0031
Köbös spline	0.0196	0.0471	0.0059
Szakaszos Hermite	0.0135	0.0365	0.0022

Approximált és sűrű rács különbsége

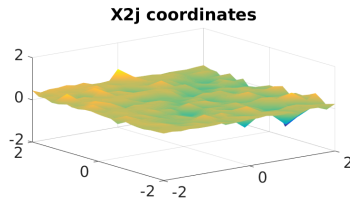
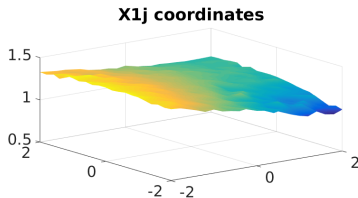
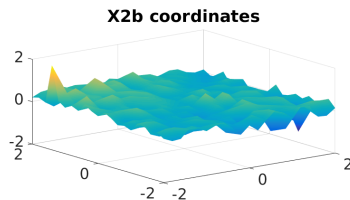
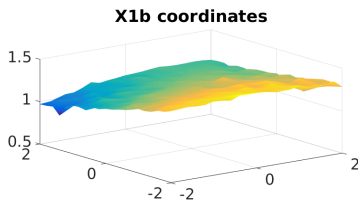


Becsült (szakaszos Hermite) és sűrűbben kiértékelt rács különbsége

Módszerek elemzése - másodrend

Másodrendben $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ függvényekkel kell dolgozni.

Nem vizualizálhatók, csak szeletekben:



A négy szabadságfok függése a görbülettől ($\alpha = \frac{3\pi}{10}, \beta = -\frac{3\pi}{10}$)

Módszerek elemzése - másodrend

Műveletigény-korlátok lépnek fel.

Lineáris interpolációs becslés hibái:

Paraméter	Átlag	Szórás	Medián
$\vec{x}_1$	0.1148	0.1782	0.0482
$\vec{x}_2$	0.6481	0.4787	0.5428
Célfüggvény	0.1167	0.1625	0.0524

Tartalom

- ▼ Interpolációs görbék
 - Geometriai Hermite
 - Parametrizálhatóság
 - Optimalizáció
- ▼ Algoritmus
 - Optimumleképezés
 - Közelítési módszerek
- ▼ Összefoglalás

Összefoglalás

- ▶ Jól megválasztott tartományok esetén az optimális görbék paraméterei jó közelítéssel becsülhetők rács alapján
- ▶ Bizonyos esetekben vannak rosszul viselkedő, vagy szinguláris tartományok, ahol óvatosabban kell eljárni
- ▶ A szakaszos Hermite-spline a legpontosabb közelítés, de a bilineáris közel olyan jó.

Köszönöm a figyelmet!