Felületmodellezés implicit függvényekkel

Sipos Ágoston

Bolyai matek szeminárium

2019. 11. 05.

Tartalom

Tartalom

Felületmodellezés/CAGD

Cél: görbék és felületek modellezése, reprezentációja, megjelenítése

- Diszkrét reprezentációk (pontfelhő, háromszögháló,...)
- **Folytonos reprezentációk** (parametrikus, implicit függvények)

Parametrikus megadás

Görbe:

$$\mathbf{p} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad [a, b] \subset \mathbb{R}$$

Felület:

$$\mathbf{p} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad [a, b] \times [c, d]^1 \subset \mathbb{R}^2$$

Előny: könnyen kiértékelhető, akár az értelmezési tartomány sok pontjában egyszerre ($\to$ könnyen konvertálható diszkrét reprezentációkra)

Elterjedt, sztenderd bázisok (Bernstejn-, Hermite-, stb. polinomok)

[1] nem feltétlenül intervallumok direktszorzata, de ezt most hagyjuk...

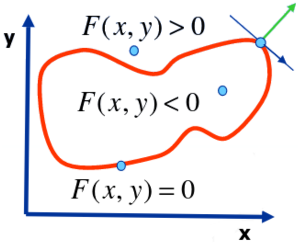
Implicit megadás

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

esetén

$$\{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 : f(p) = 0\}$$

implicit felület



Általában felület ($3 - 1 = 2$ dimenziós), de pl.:
$f(\mathbf{p}) = ||\mathbf{p}||_2^2 \to$ egyetlen pont
$f(\mathbf{p}) = ||\mathbf{p}||_2^2 + 1 \to$ üres halmaz
$f \equiv 0 \to$ teljes tér

Valójában a teret szétosztja a „külsejére” és a „belsejére” (ezek sem feltétlenül összefüggők persze)

Implicit megadás

Általában „szabályos” objektumok megadására használják.
Sík: $f(x, y, z) = ax + by + cz + d$
Gömbfelület: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$
Hengerfelület: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - r^2$
Tórusz: $f(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 - r^2$

Első ránézésre nem igazán alkalmazás-orientált:

- Pontok kiértékeléséhez gyökkereső algoritmus kell
- Összetettebb felületeket nem látszik, hogyan kell modellezni

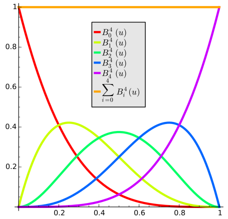
De:

- Approximáció, offszetelés egyszerűbb
- Nem kell értelmezési tartományt „kitalálni”
- Hardveresen gyorsítható gyökkeresés (?)

Modellezés parametrikussal - Bézier

Bernstejn-polinomok: $B_k^n(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k},\ t \in [0,1], k = 0,..,n$

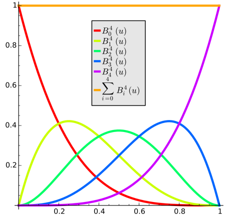
- Az n-edfokú polinomok terén bázis
- $B_k^n(t) \geq 0$
- $\sum_{k=0}^n B_k^n \equiv 1$
- $B_0^n(0) = 1,\ B_n^n(1) = 1$



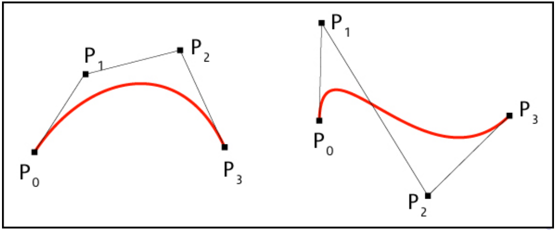
Modellezés parametrikussal - Bézier

Bernstejn-polinomok: $B_k^n(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k},\ t \in [0,1], k = 0,..,n$

- Az n-edfokú polinomok terén bázis
- $B_k^n(t) \geq 0$
- $\sum_{k=0}^n B_k^n \equiv 1$
- $B_0^n(0) = 1,\ B_n^n(1) = 1$



Pontok súlyozása Bernstejn-polinomokkal *konvex kombináció*.

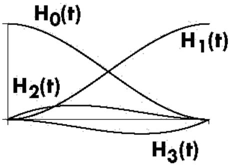


A görbét definiáló (a tervező által megadandó) adatok *geometriai jelentéssel bírnak*.

Modellezés parametrikussal - Hermite

Görbe illesztése két végpontra és két deriváltra

Hermite-súlyfüggvények:

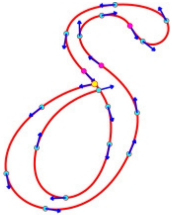


$H_0(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$

$H_1(t) = -2t^3 + 3t^2$

$H_2(t) = t^3 - 2t^2 + t$

$H_3(t) = t^3 - t^2$



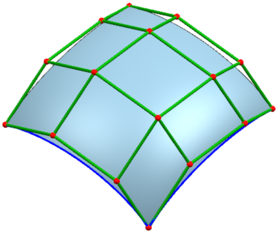
Több ilyen szegmens egymás után kötésével C^1 folytonos interpoláló „spline” görbét lehet létrehozni.

Parametrikus felületek

Általában: ún. tenzorszorzat felületek

$$P(u,v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} f_i(u) g_j(v) \mathbf{p}_{i,j}$$

$$(u,v) \in [a,b] \times [c,d]$$



Hátrányuk: csak négy oldalú (négy határgörbe által határolt) felületeket állítanak elő.
Bonyolultabb konstrukciók persze léteznek.

Tartalom

Implicit módszerek

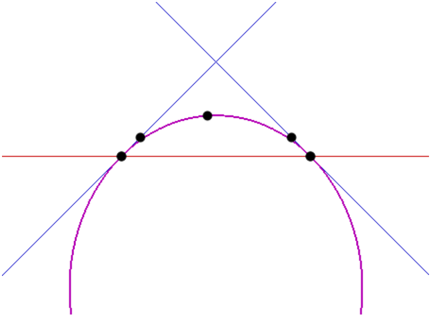
Liming, Roy A
Conic Lofting of Streamline Bodies.
Aircraft Engineering and Aerospace Technology. 1947.

Li, Jinggong, Josef Hoschek, and Erich Hartmann.
G^{n*}-functional splines for interpolation and approximation of curves, surfaces and solids
Computer Aided Geometric Design 7.1-4: 209-220., 1990

Várady, T., Benkő, P., Kós, G. and Rockwood, A.
Implicit surfaces revisited — I-patches.
Geometric Modelling. pp. 323-335. Springer, Vienna, 2001.

Lekerekítések - Liming módszere

- Adott két metsző egyenes (implicit formában: $L_1 = 0, L_2 = 0$), kerekítsük le a sarkot.
- Megoldás: vegyük a „saroklevágó" egyenest ($C_1 = 0$)
- $F = (1-\lambda)L_1L_2 + \lambda C_1^2$ lesz a lekerekítő görbe

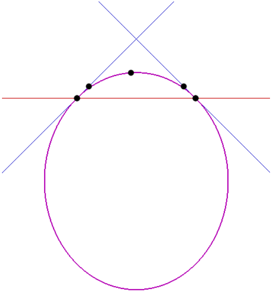


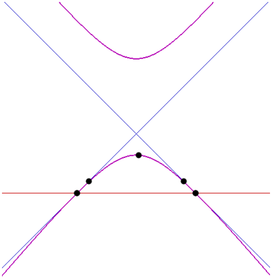
Lekerekítések - Liming módszere

- $F = (1-\lambda)L_1 L_2 + \lambda C_1^2$
- Kell:
  - 1.: $\{L_i = 0\} \cap \{C_1 = 0\} \subset \{F = 0\}, i = 1, 2$
  - 2.: $p_i \in \{L_i = 0\} \cap \{C_1 = 0\}, \nabla L_i(p_i) = c \cdot \nabla F(p_i)$
- 1. trivi (0+0=0)
- 2.: $(\nabla F)(p_i) = (1-\lambda)((\nabla L_1)(p_i)L_2(p_i) + (\nabla L_2)(p_i)L_1(p_i)) + +2\lambda(\nabla C_1)(p_i)C_1(p_i) = (1-\lambda)L_{3-i}(p_i)(\nabla L_i)(p_i) = const \cdot (\nabla L_i)(p_i)$

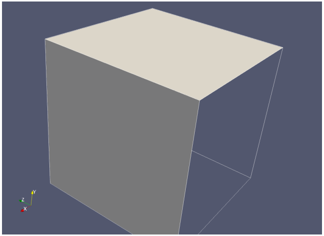
Lekerekítések - Liming módszere

- Ezek valójában kúpszeletek
- Egyenes és egyenes szorzata (elfajult) kúpszelet, kúpszeletek összege kúpszelet

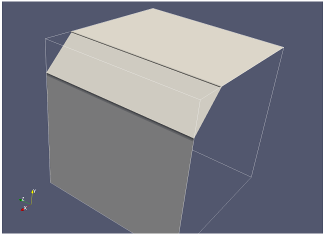




Felületek lekerekítése

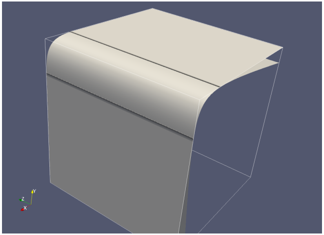


Lekerekítendő él

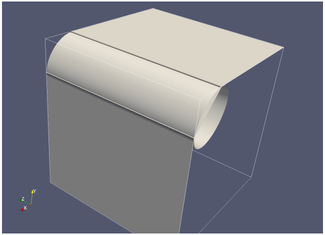


Levágott él

Felületek lekerekítése



Liming-lekerekítés, $\lambda = 0.2$

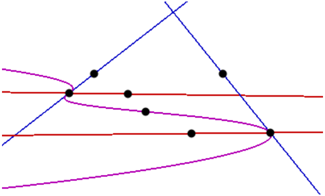


Liming-lekerekítés, $\lambda = 0.6$

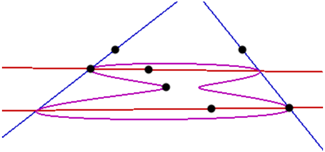
Funkcionális spline

- Általánosítás n lekerekítendő és m vágó felületre: funkcionális spline
- $F = (1-\lambda)\prod_{i=1}^{n} P_i + \lambda \prod_{i=1}^{m} B_i^2$, ahol P_i, $i = 1..n$ elsődleges felületek (amihez elsőrendben simul az eredményfelület), B_i, $i = 1..m$ vágó felületek
- Hiszen a produktum valójában unió
- Probléma: nem csoportosulnak a geometriai elemek, pedig általában nem minden vágó tartozik minden elsődlegeshez

Funkcionális spline



Amit szeretnénk

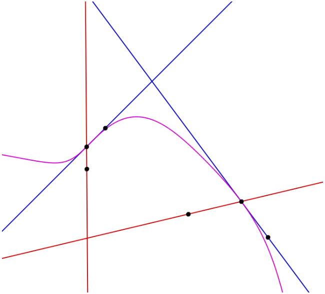


Funkcionális spline

(Szándékosan gonosz példa természetesen.)

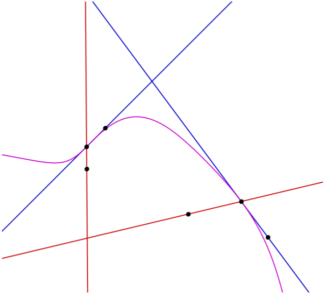
I-Patch

- P_i, $i = 1..n$ elsődleges felületek, B_i, $i = 1..n$ vágó felületek, az azonos indexűek közösen adnak meg egy határgörbét
- $I = \sum_{i=1}^{n} (w_i P_i \prod_{j \neq i} B_j^2) + w \prod_{i=1}^{n} B_i^2$, $w_i, w \in \mathbb{R}$



- Azaz pl. $n = 2$-ra: $I = w_1 P_1 B_2^2 + w_2 P_2 B_1^2 + w B_1^2 B_2^2$
- n szabad paraméter van (valamelyikkel le lehet osztani)

Tulajdonságok



$I = w_1 P_1 B_2^2 + w_2 P_2 B_1^2 + w B_1^2 B_2^2$

Határinterpoláció:

- i. határgörbe: $\{P_i = 0\} \cap \{B_i = 0\}$
- Triviálisan 0 a függvényérték

Folytonos csatlakozás:

- Kell: az i. határgörbén elsőrendben simán kapcsolódjon P_i-hez
- $I = QP_i + WB_i^2, \qquad Q, W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- $(\nabla I) = (\nabla Q) P_i + Q (\nabla P_i) + (\nabla W) B_i^2 + W 2B_i (\nabla B_i) =$
  $= 0 + Q (\nabla P_i) + 0 + 0$
- G^n folytonossághoz: az egyenletben a B_i-k kitevője legyen $n+1$

Patch belseje - interpoláció

- A szabad paraméterek felhasználhatók a patch belsejének kontrollálására.
- Egy darab interpolálandó pont (x_0, y_0) esetén
$$w = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(w_i P_i(x_0, y_0)\prod_{j\neq i} B_j^2(x_0, y_0)\right)}{\prod_{i=1}^{n} B_i^2(x_0, y_0)}$$
garantálja, hogy az I-Patch átmenjen a ponton

Patch belseje - approximáció

Approximáció pontfelhőre

$p_i \in \mathbb{R}^3$, $i \in 1..N$ pontfelhő

$\min_I \sum_{i=1}^{N} I(p_i)^2$ legkisebb négyzetes hibaminimalizálás

$$\min_{\mathbf{w}} \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{n} (w_j P_j(p_i) \cdot \prod_{k \neq j} B_k(P_i)^2) + \prod_{k=1}^{n} B_k(P_i)^2 \right)$$

$$\min_{\mathbf{w}} \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{n} (w_j M_j(p_i)) + F(p_i) \right)$$

Patch belseje - approximáció

$$\min_{\mathbf{w}} \sum_{i=1}^{N} \Big(\sum_{j=1}^{n} (w_j M_j(p_i)) + F(p_i) \Big)$$

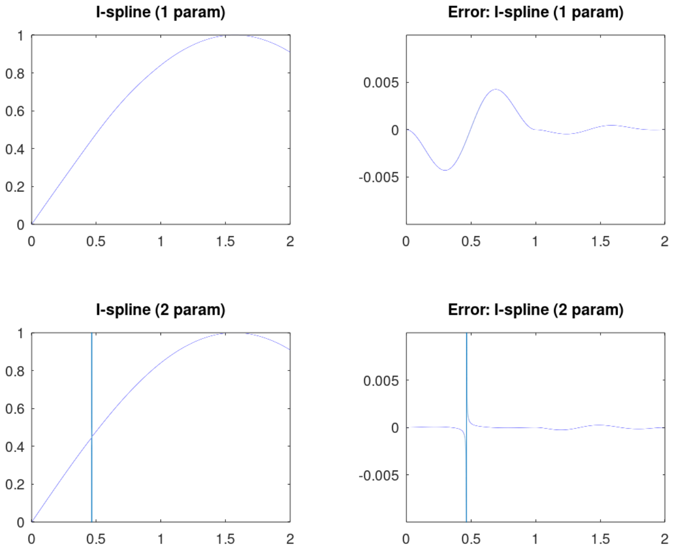
$$\frac{\partial}{\partial w_k} \sum_{i=1}^{N} I(p_i)^2 = \sum_{i=1}^{N} 2\Big(\sum_{j=1}^{n} (w_j M_j(p_i)) + F(p_i) \Big) M_k(p_i) = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j \sum_{i=1}^{N} M_j(p_i) M_k(p_i) = - \sum_{i=1}^{N} F(p_i) M_k(p_i)$$

$$\begin{bmatrix} \sum_i M_{1,1}(p_i) & \dots & \sum_i M_{n,1}(p_i) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_i M_{1,n}(p_i) & \dots & \sum_i M_{n,n}(p_i) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \sum_i F(p_i) M_1(p_i) \\ \vdots \\ \sum_i F(p_i) M_n(p_i) \end{bmatrix}$$

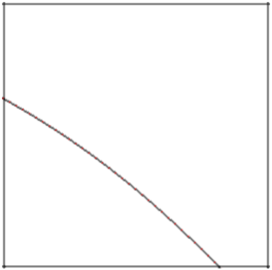
$$(M_{i,j} = M_i M_j)$$

Patch belseje - approximáció

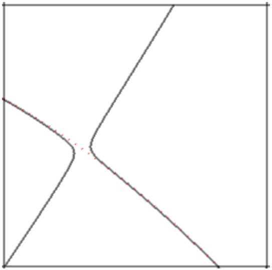


Összefüggőségi feltételek

Nem garantált, hogy az I-Patch összefüggő (el lehet jutni a görbén az egyik végpontból a másikba)



Összefüggő görbe



Nem összefüggő görbe

A probléma a P_i-k előjeleivel van.

Összefüggőségi feltételek

Tétel

Két végpontú I-patch görbe esetén
$B_1(Q) = 0, B_2(Q) = 0 \Rightarrow I(Q) = 0$

Triviális, az összes tag 0.

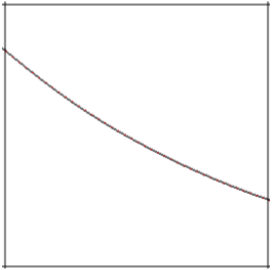
Tétel

Ha még $P_1(Q) \cdot P_2(Q) > 0$, akkor $\exists \varepsilon > 0 : k_\varepsilon(Q) \setminus Q$ nem tartalmaz görbepontot.

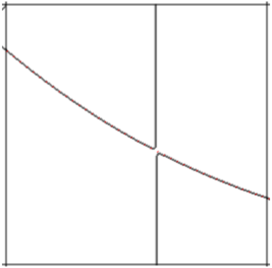
Ugyanis (vázlat): az egyenlet harmadik tagja $O(\varepsilon^4)$, az első kettő $O(\varepsilon^2)$. Válasszuk ε-t úgy, hogy (a) a környezeten semelyik P_i ne váltson előjelet, és (b) az utolsó tag legyen abszolútértékben kicsi. Ekkor az implicit egyenlet a teljes környezeten állandó előjelű lesz.

Összefüggőségi feltételek

A probléma akkor is fennáll, ha a határok nem metszik egymást.



Összefüggő görbe

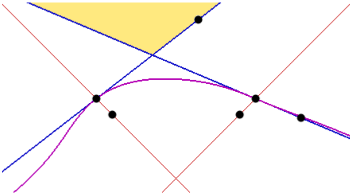


Nem összefüggő görbe

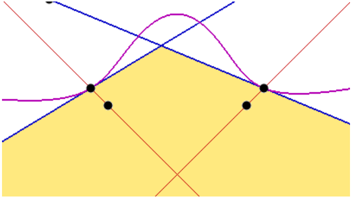
Hasonlóan kezelhető, vizsgálni kell az ideális pontban levő metszéseket is.

A görbe belsejének irányítása

Általánosan meghatározhatók görbepontot nem tartalmazó területek.



$w_c > 0$

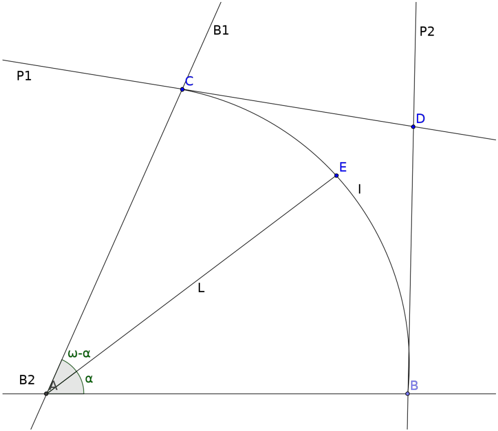


$w_c < 0$

Tétel

Legyen R összefüggő halmaz, melyen P_1, P_2 állandó előjelű, $Q \in R$. Ekkor, ha $P_1(Q), P_2(Q)$ és w_c azonos előjelűek, akkor R nem tartalmaz görbepontot. (Kivéve esetleg a határ-metszéspontot.)

Paraméterezhetőség

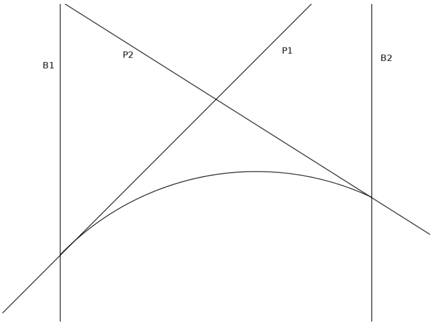


α függvényében *másodfokú* egyenlet írható fel a görbepontokra

Diszkriminánssal elégséges feltételek adhatók görbeösszefüggőségre

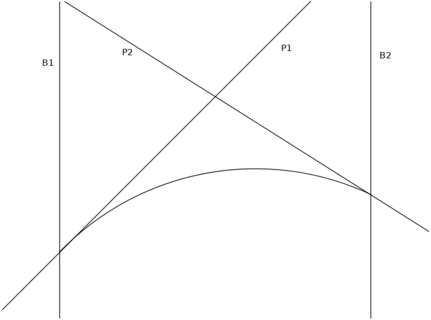
Kiértékelésre is jó

Paraméterezhetőség



A párhuzamos eset még jobb, ugyanis ekkor explicit alakba írható a görbe (a B_1-től vett távolság függvényében).

Paraméterezhetőség

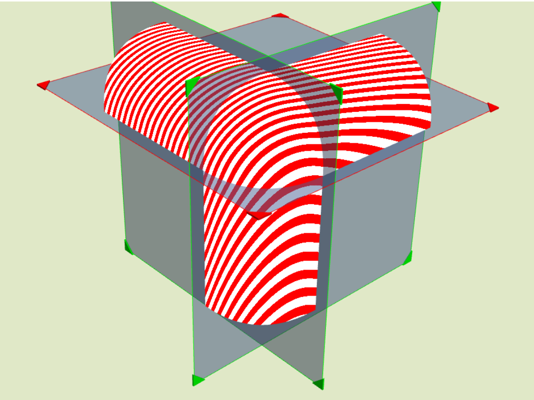


$$P_1(x,y) = y - f_1(x) \qquad B_1(x,y) = x - k_1$$
$$P_2(x,y) = y - f_2(x) \qquad B_2(x,y) = x - k_2$$

$$f_I(x) = \frac{f_1(x)\cdot(x-k_2)^2 + f_2(x)\cdot(x-k_1)^2 + w(x-k_1)^2(x-k_2)^2}{(x-k_1)^2+(x-k_2)^2}$$

3D felírás - határokkal

$$I = \sum_{i=1}^{n} (w_i P_i \prod_{j \neq i} B_j^2) + w \prod_{i=1}^{n} B_i^2, \; w_i, w \in \mathbb{R}$$



3D felírás - sarkokkal

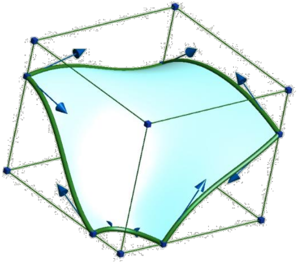
$$I=\sum_{k=1}^{n} C_{k,k+1}\left(\prod_{i\neq k, i\neq k+1} B_i^2\right)+\sum_{k=1}^{n} w_k\left(\prod_{i\neq k} B_i^2\right)+w\prod_{i=1}^{n} B_i^2$$

Tartalom

Cellaalapú modellezés

- Adott (praktikusan szabályos) térparticionálás mellett definiálja a felületet minden cellára egy-egy implicit függvény
- Cellahatáron ezek csatlakozzanak folytonosan

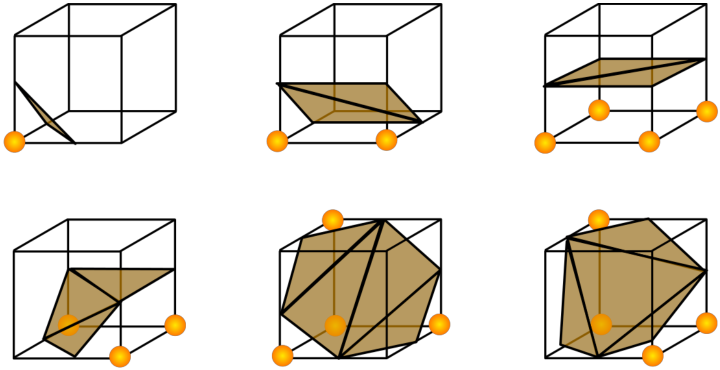
Célszerű bemenet:
sarokpontokban rögzített érintősíkok



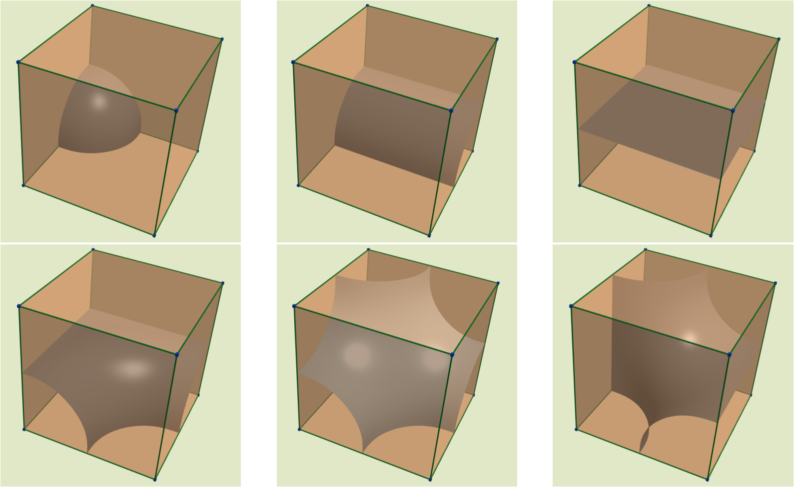
N-oldalú patch

Felülettopológiák

A csúcsok osztályozásával

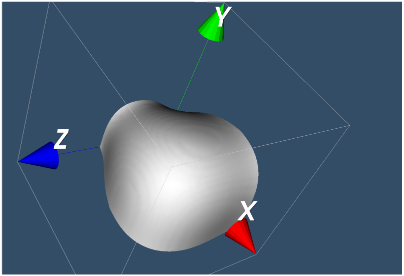


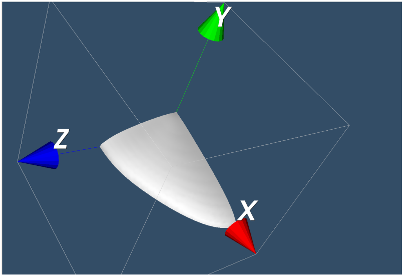
„Ideális” felületelemek



Probléma

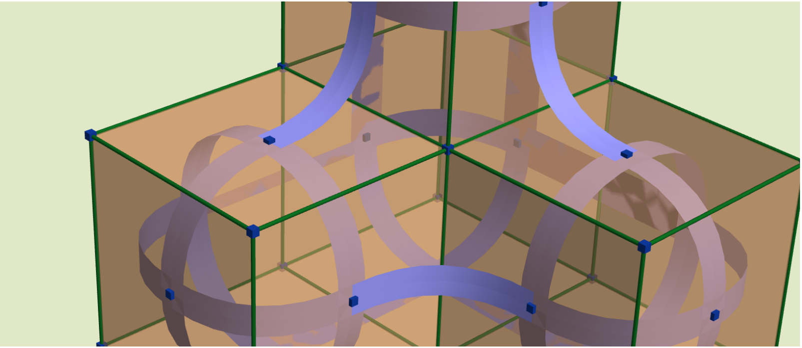
Együtthatók beállítása nem nyilvánvaló



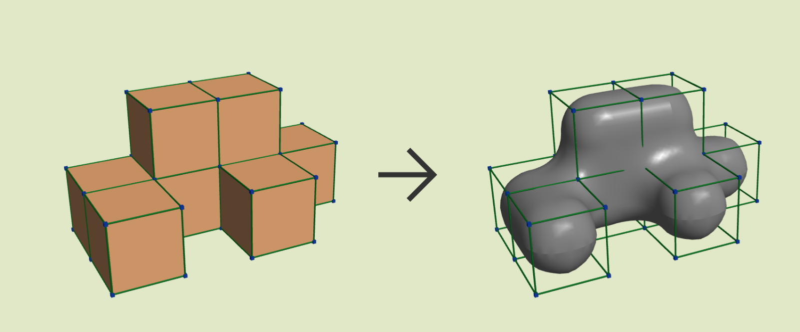


Automatikus módszer lenne jó

Poliéder lekerekítés

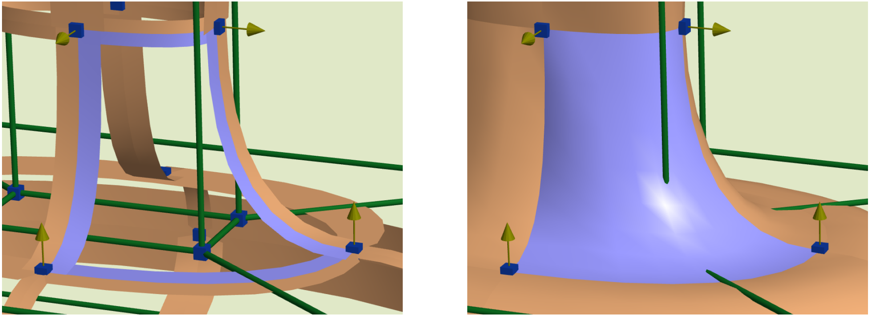


Poliéder lekerekítés



Nemsztenderd konfigurációk

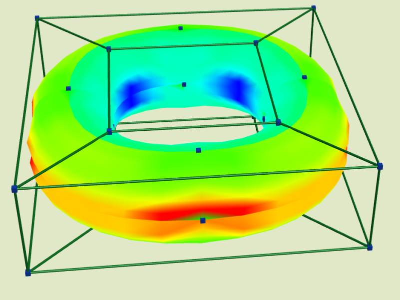
Egy irányba eső szomszédos normálvektorok $\rightarrow$ elfajuló egyenlet $(P_i \equiv B_i)$



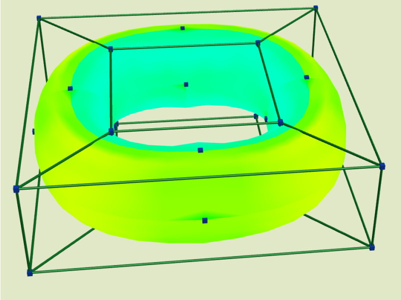
Alternatív megoldás (lásd ábra)

Poliéder lekerekítés - paraméterek

Optimalizációra itt is szükség lehet



„parabolikus tórusz" egység együtthatókkal...



... és optimalizációval[2] számolt együtthatókkal

[2] Ez még nem a tökéletes, csak az alapötlet

Összefoglalás

Előnyök:

- Szabadformájú implicit felületek
- Praktikus pl. approximáció, offszetelés, sugárkövetés céljára
- Automatikusan teljesülő folytonossági feltételek

Nehézségek:

- Nehéz megakadályozni a felületek szétesését bizonyos geometriákra
- Együtthatók jelentése, meghatározása nem világos

Kérdések?